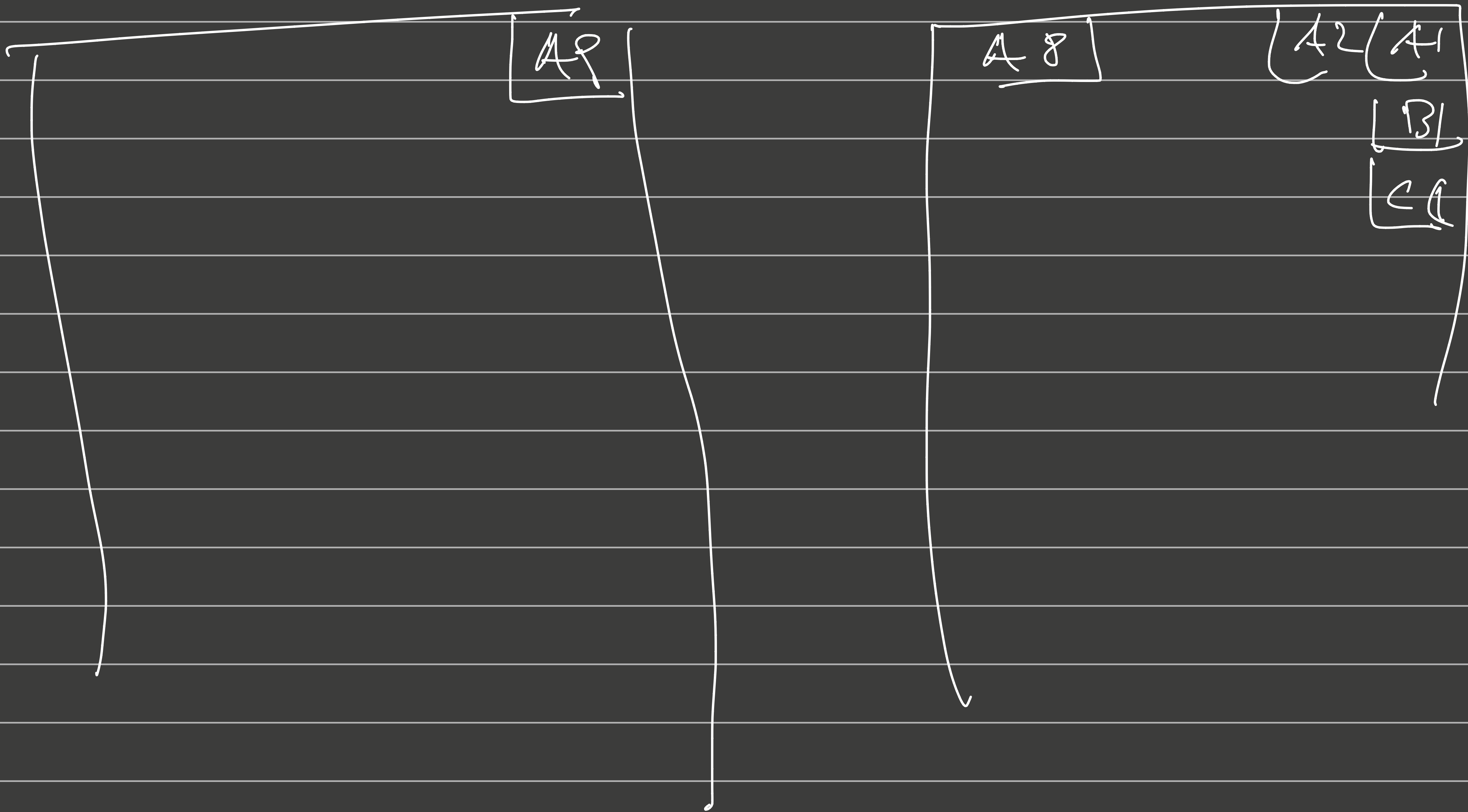
Disposizione dei posti

C



LEZIONE 15 25/XI/2017

ESERCITAZIONE

① Dimostrare per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} < \frac{1}{\sqrt{4n+5}}$$

$n=0$ $$\prod_{k=0}^{0} \frac{4k+1}{4k+3} = \frac{4\cdot 0+1}{4\cdot 0+3} = \frac{1}{3}$$

$n=1$ $$\prod_{k=0}^{1} \frac{4k+1}{4k+3} = \frac{4\cdot 0+1}{4\cdot 0+3} \cdot \frac{4\cdot 1+1}{4\cdot 1+3} = \frac{1}{3}\,\frac{5}{7}.$$

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\,\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{16}\cdots\frac{4n+1}{4n+3}$$

PASSO DI PARTENZA $$\prod_{k=0}^{0} \frac{4k+1}{4k+3} = \frac{1}{3} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{5}} \iff$$

$3 > \sqrt{5} \iff 9 > 5$

PASSO INDUTTIVO

Ipotesi $$\prod_{k=0}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} < \frac{1}{\sqrt{4n+5}} \qquad (\mathrm{I})$$

$\exists\, n$ tale che (I)

Tesi $$\prod_{k=0}^{n+1} \frac{4k+1}{4k+3} < \frac{1}{\sqrt{4(n+1)+5}} = \frac{1}{\sqrt{4n+9}}$$

Dim

ASSOCIATIVA

$$\prod_{k=0}^{n+1} \frac{4k+1}{4k+3} = \prod_{k=0}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} \cdot \frac{4(n+1)+1}{4(n+1)+3} < \frac{1}{\sqrt{4n+5}} \cdot \frac{4n+5}{4n+7}$$

L'affermazione è provata facendo vedere che

$$\frac{4n+5}{(4n+7)\sqrt{4n+5}} < \frac{1}{\sqrt{4n+9}} \iff \frac{\sqrt{4n+5}}{4n+7} < \frac{1}{\sqrt{4n+9}}$$

$$\sqrt{4n+5} \cdot \sqrt{4n+9} < 4n+7 \qquad \text{perché } n \geq 0$$

$$(4n+5)(4n+9) < (4n+7)^2 \iff \cancel{16n^2} + \cancel{56n} + 45 < \cancel{16n^2} + \cancel{56n} + 49$$

(2) Dimostrare che per ogni $x < 1$

$$\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

Si dimostra usando il teorema della derivata nulla

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x \qquad \underline{\underline{x<1}}$$

$$f(0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ l'affermazione per il th. della derivata nulla

$$D_y(\arctan y) = \frac{1}{1+y^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\cancel{(1-x)^2}}{(1-x)^2+(1+x)^2} \cdot \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{\cancel{(1-x)^2}} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{2}{1-\cancel{2x}+x^2+1+\cancel{2x}+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$= \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

③ Risolvere le equazioni

$$4^{\sqrt{x+2}} + 6 = 4^{2-\sqrt{x+2}} \qquad \sqrt{x+15} + \sqrt{x} = 15$$

$$u = 4^{\sqrt{x+2}} \qquad u + 6 = \frac{4^2}{u} \Rightarrow u^2 + 6u - 16 = 0$$

$$u = \frac{-3 \mp \sqrt{9+16}}{1} = -3 \mp 5 \begin{array}{l} -8 \\ 2 \end{array}$$

$4^{\sqrt{x+2}} = -8$ non ha soluzioni reali

$$4^{\sqrt{x+2}} = 2 \qquad \ln 4^{\sqrt{x+2}} = \ln 2$$

$$\sqrt{x+2} \cdot \ln 4 = \ln 2$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{\ln 2}{\ln 4} \qquad x + 2 = \left(\frac{\ln 2}{\ln 4}\right)^2$$

$$x+2 = \left(\frac{\ln 2}{\ln 4}\right)^2 = \left(\frac{\ln 2}{\ln 2^2}\right)^2 = \left(\frac{\ln 2}{2\ln 2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \qquad x+2 = \frac{1}{4} \qquad x = -\frac{7}{4}$$

$\sqrt{x+2}$ è positivo per $x = -\frac{7}{4}$

Soluzione alternativa

$$4^{\sqrt{x+2}} = 2 \iff \left(2^2\right)^{\sqrt{x+2}} = 2$$

$$\iff 2^{2\sqrt{x+2}} = 2^1$$

$$2\sqrt{x+2} = 1 \qquad \sqrt{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$x+2 = \frac{1}{4}$$

$\sqrt{x+15}+\sqrt{x}=15$ $\qquad x \geq 0 \qquad \boxed{x+15 \geq 0 \quad \text{superflua}}$

moltiplico i due lati dell'equazione per $\sqrt{x+15}-\sqrt{x}$

$$\left(\sqrt{x+15}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)=15\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)$$

$$\left(\sqrt{x+15}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2=15\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)$$

$$x+15-x=15\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)$$

$$15=15\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+15}-\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x+15}+\sqrt{x}=15\end{cases}$$

Alla seconda equazione sottraggo la prima

$2\sqrt{x}=14$ Anche questa è equivalente

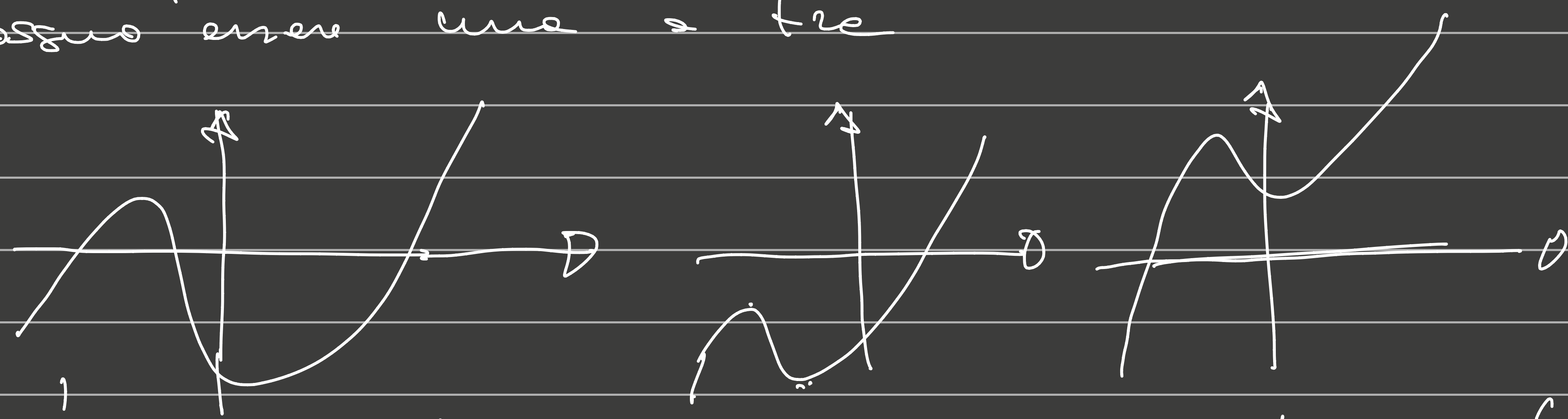
$\sqrt{x}=7 \Rightarrow x=49$

(4) Determinare il numero di zeri al variare del parametro $\alpha > 0$ di:

$$f(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 - 12\alpha^2 x + 1 ,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

f' è pol. di secondo grado: se emette due radici distinte, f ha un max ed un min.: e secondo del segno delle ordinate di questi punti, le radici possono essere una o tre



Se f' polinomio di secondo grado non si annulla mai $(\Delta < 0)$ allora f ha un solo zero reale.

$$f(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 - 12\alpha^2 x + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6\alpha x - 12\alpha^2 = 6\left(x^2 - \alpha x - 2\alpha^2\right)$$

$$x = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha \mp \sqrt{9\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha \pm 3\alpha}{2} \begin{matrix} \nearrow\ 2\alpha \\ \searrow\ -\alpha \end{matrix}$$

$$\nearrow \quad -\alpha \quad \searrow \quad 2\alpha \quad \nearrow$$

$$\max\left(-\alpha, f(-\alpha)\right) = \left(-\alpha, -2\alpha^3 - 3\alpha^3 + 12\alpha^3 + 1\right)$$

$$= \left(-\alpha, 1 + 7\alpha^3\right)$$

$$\min\left(2\alpha, f(2\alpha)\right) = \left(2\alpha, 16\alpha^3 - 12\alpha^3 - 24\alpha^3 + 1\right)$$

$$\left(2\alpha, 1 - 20\alpha^3\right)$$

1 Zero se $1 - 20\alpha^3 > 0$

3 Zeri se $1 - 20\alpha^3 < 0$

5 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - 3x\cos x}{\ln(1+3x) - 3\ln(1+x) + 3x^2}$

Uso gli sviluppi di Mac Laurin:

Numeratore $3(\sin x - x\cos x) =$

$$3\left(x - \frac{x^3}{6} - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)\right) =$$

$$3\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)\right) = 3\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= x^3 + o(x^3)$$

Denominatore

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

$$u = 3x \to \ln(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+3x) - 3\ln(1+x) + 3x^2 = \cancel{3x} - \cancel{\frac{9}{2}x^2} + 9x^3 \cancel{-3x} + \cancel{3\frac{x^2}{2}} - 3\frac{x^3}{3} + \cancel{3x^2} + o(x^3)$$

$$= 8x^3 + o(x^3)$$

Quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{3(\sin x - x\cos x)}{\ln(1+3x) - 3\ln(1+x) + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+o(x^3)}{8x^3+o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+o(1)}{8+o(1)} = \frac{1}{8}$$

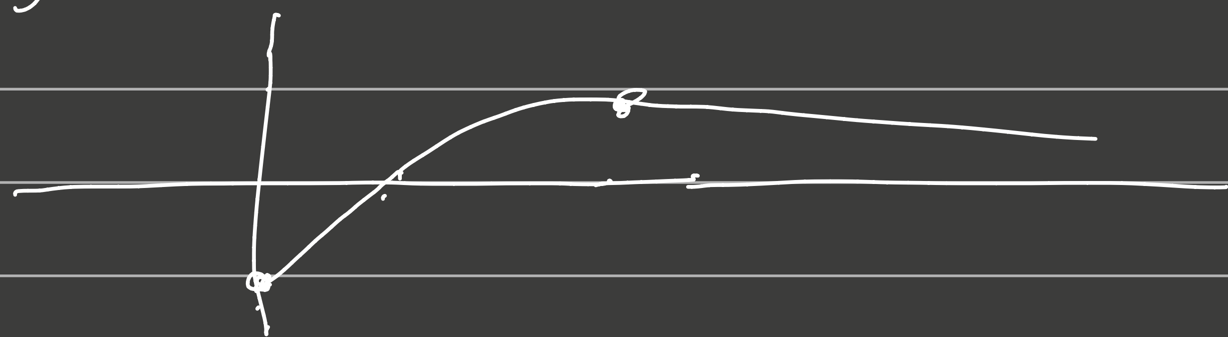
Massimi e minimi relativi di $f(x) = \dfrac{2\sqrt{|x|}-1}{2(1+x^2)}$

f è pari perché $f(-x) = f(x)$

quindi basta trattare il problema per $x \geq 0$ e poi "replicare" per simmetria le eventuali soluzioni trovate

$x \geq 0$ $\quad f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{2(1+x^2)}$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$f(0) = -\frac{1}{2}$



$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}(1+x^2) - 2x(2\sqrt{x}-1)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+x^2 - 2x\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\,(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+x^2 - 4x + 2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1 + 2x\sqrt{x} - 3x^2}{(1+x^2)^2}$$

Cambio variabile $\sqrt{x} = u$ così il numeratore diventa

$$n(u) = 1 + 2u^3 - 3u^4$$

Si vede che $n(1) = 0$ quindi per la regola di Ruffini

	1	0	0	2	-3
1		1	1	1	3
	1	1	1	3	0

Pertanto abbiamo la fattorizzazione

$$1+2u-3u^4 = (1-u)(1+u+u^2+3u^3)$$

Poi si osservi che il polinomio di terzo grado $1+u+u^2+3u^3$ non ha radici positive, quindi per $u>0$ è $n(u)>0 \iff u<1$

Ripetendo questo troverò il numeratore di $f'(x)$

$$1+2x\sqrt{x}-3x^2>0 \iff x<1$$

Quindi $x=1$ è punto di massimo per f.

Concludiamo (per simmetria) la funzione avrà grafico
ha due punti di max per $x=1$ e per $x=-1$
Tali massimi sono assoluti, mentre in $x=0$ f
ha minimo (assoluto) anche se f in quel punto
non è derivabile